



TITLE:

# 円柱のまわりのNavier-Stokes流の数値計算 (流体力学における非線型問題研究会報告集)

AUTHOR(S):

高見, 穎郎

---

CITATION:

高見, 穎郎. 円柱のまわりのNavier-Stokes流の数値計算 (流体力学における非線型問題研究会報告集). 数理解析研究所講究録 1967, 24: 13-35

ISSUE DATE:

1967-05

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/107491>

RIGHT:

# 円柱のまわりの Navier-Stokes 流の数値計算

東大工 高見 穎郎

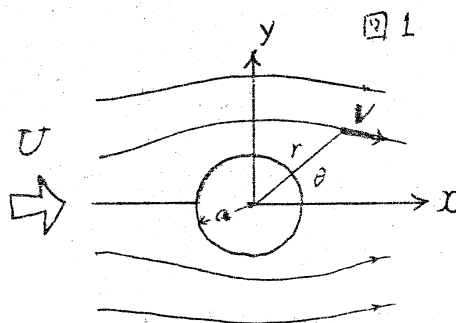
## §1. はしがき

無限に広がった一様流の中に。これと垂直に円柱がおかれた場合の流れの様子を、時間変化を含まない Navier-Stokes 方程式を数値的に解くことによって調べる。この種の計算は、最初 Thom [13] によって始められ、その後 Kawaguti [7], Allen & Southwell [1], Apelt [2], Dennis & Shimshoni [4] 等が行なった。また、最近、Kawaguti & Jain [9] は、非定常解の  $t \rightarrow \infty$  の極限として定常解を求めることに成功している。

ここでは、一様流の速さと円柱の直径とからつくった Reynolds 数  $R$  の 1 ~ 60 の範囲について、流場の場を計算した結果を報告する。

## §2. 基礎方程式

流速を  $\mathbf{v}(x, y)$ , 圧力を  $p(x, y)$ , 密度を  $\rho$  (一定), 運動粘性率を  $\nu$  (一定) とすれば、定常な 流れの場は次の方程式で記述される:



$$(\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p + \nu \Delta \mathbf{v}, \quad (2.1)$$

$$\text{div } \mathbf{v} = 0. \quad (2.2)$$

ただし  $\tilde{\Delta} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ .

境界条件は,  $r=a : v = 0,$  (2.3)

$r \rightarrow \infty : v \rightarrow (U, 0).$  (2.4)

流れの関数  $\Psi$  を用いれば  $v = (\frac{\partial \Psi}{\partial y}, -\frac{\partial \Psi}{\partial x})$  となり, (2.2) は恒等的にみたされる. 今後, 長さの単位としては円柱の半径  $a$  を, 速さの単位としては一様流の速さ  $U$  をとることにしよう. 一様流からのずれを考慮することにして  $\Psi = y + \psi$  とおき (右辺第1項  $y$  は一様流を表わす), (2.1) の両辺の  $\text{rot}$  をとって整理すれば,

$$\tilde{\Delta} \omega = \frac{R}{2} \left[ \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial(\psi, \omega)}{\partial(x, y)} \right]. \quad (2.5)$$

ただし,  $\omega$  は渦度で

$$\omega = \text{rot } v = -\tilde{\Delta} \Psi = -\tilde{\Delta} \psi, \quad (2.6)$$

また,  $R$  は Reynolds 数で

$$R = \frac{2Ua}{\nu}. \quad (2.7)$$

今後,  $x$  軸に関して対称な流れだけを問題にする. したがって例えば上半面だけを考えればよい. そこで, 対称線上での境界条件は

$$y=0 : \psi = 0, \omega = 0. \quad (2.8)$$

境界条件 (2.3) は

$$r=1 : \psi = -\sin \theta, \frac{\partial \psi}{\partial r} = -\sin \theta. \quad (2.9)$$

$r \rightarrow \infty$  での境界条件 (2.4) は, 近似的にこれを  $r = r_\infty \gg 1$  での境界条件でおきかえる. Navier-Stokes 方程式の解の,  $r$  が大

きいところでの漸近的性質は, Imai [5] によって詳しく研究されている。すなわち, 大きな  $r$  の値については,  $\psi$  および  $\omega$  の具体形が, (大ざっぱな言い方であるが)  $r^{-\frac{1}{2}}$  の昇べき級数の形で, 始めの数項がえられている。ただし, この展開式の中には, 解がわかったときに初めてわかる量, つまり抵抗係数  $C_D$  ( $=$  (流れが物体に及ぼす力) /  $(\rho v^2 a)$ ) がパラメータとして含まれていることは注意すべきである。すなわち, (2.4) の代りに境界条件

$$r=r_\infty: \quad \begin{cases} \psi = \tilde{F}(r_\infty, \theta; C_D), \\ \omega = \tilde{G}(r_\infty, \theta; C_D) \end{cases} \quad (2.10)$$

$$(2.11)$$

を用いることにする。右辺の関数の具体形はあとで示す。

次に, 数値計算の便宜上, 変換

$$\xi + i\eta = \frac{1}{\pi} \log(x + iy) \quad (2.12)$$

を行なう。これによって,  $xy$  面での物体外部の上半面は,  $\xi\eta$  面での半無限帯状領域に等角写像される (図2)。

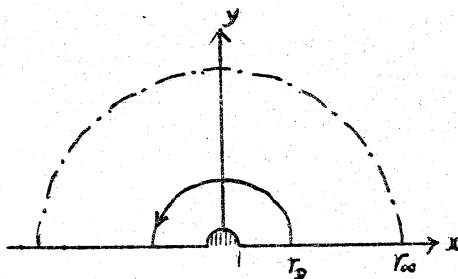
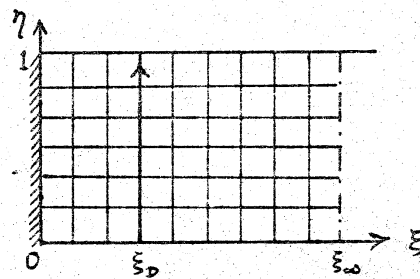


図2



まとめると, われわれの問題は次のようになる。方程式

$$\Delta \omega = \frac{R}{2} \left[ \pi r (\cos \theta \frac{\partial \omega}{\partial \xi} - \sin \theta \frac{\partial \omega}{\partial \eta}) - \frac{\partial(\psi, \omega)}{\partial(\xi, \eta)} \right], \quad (2.13)$$

$$\Delta \psi = -\pi^2 r^2 \omega \quad (2.14)$$

$z$ , 境界条件

$$\eta = 0, 1 : \psi = 0, \omega = 0, \quad (2.15)$$

$$\xi = 0 : \psi = -\sin \pi \eta, \frac{\partial \psi}{\partial \xi} = -\pi \sin \pi \eta, \quad (2.16)$$

$$\xi = \xi_\infty : \psi = F(\xi_\infty, \eta; C_D), \omega = G(\xi_\infty, \eta; C_D) \quad (2.17)$$

のしこで解くこと。  $\eta$  に対し  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}$ 。

抵抗係数  $C_D$  は、解  $\psi, \omega$  がわかったときから、次の一般化された Blasius の式により計算される (Imai [5]):

$$C_D - iC_L = -2i \oint_{\Gamma} \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 dz - i \oint_{\Gamma} \omega \bar{z} d\psi - \frac{4}{R} \oint_{\Gamma} \frac{\partial \omega}{\partial \bar{z}} \bar{z} d\bar{z}. \quad (2.18)$$

にたい  $C_L$  は揚力係数,  $z = x + iy$ ,  $\bar{z} = x - iy$ ,  $\Gamma$  は物体と取囲む任意の閉曲線である。以下では、 $\Gamma$  として特に  $\xi = \xi_D$  (円周  $r = r_D$ ) とする。このときには

$$\begin{aligned} C_D = & \frac{1}{\pi r_D} \int_0^1 \left\{ \left[ \left( \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + \pi r_D \sin \pi \eta \right)^2 - \left( \frac{\partial \psi}{\partial \eta} + \pi r_D \cos \pi \eta \right)^2 \right] \cos \pi \eta \right. \\ & \left. - 2 \left( \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + \pi r_D \sin \pi \eta \right) \left( \frac{\partial \psi}{\partial \eta} + \pi r_D \cos \pi \eta \right) \sin \pi \eta \right\} d\eta \\ & - 2 r_D \int_0^1 \omega \sin \pi \eta \left( \frac{\partial \psi}{\partial \eta} + \pi r_D \cos \pi \eta \right) d\eta \\ & + \frac{4 r_D}{R} \int_0^1 \left( \frac{\partial \omega}{\partial \xi} - \pi \omega \right) \sin \pi \eta d\eta \end{aligned} \quad (2.19)$$

となる。また、

$$\begin{aligned} F(\xi, \eta; C_D) = & \frac{C_D}{2} (\eta - \operatorname{erf} Q) \\ & - \frac{C_D^2 R}{16 \sqrt{\pi}} \left\{ \frac{1}{P} [\sqrt{2} (\operatorname{erf} \sqrt{2} Q - 1) - e^{-Q^2} \operatorname{erf} Q] + \frac{\sqrt{2} P}{P^2 + Q^2} \right\} + \dots \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} G(\xi, \eta; C_D) = & - \frac{C_D R}{4 \sqrt{\pi}} \frac{Q}{r} e^{-Q^2} \\ & + \frac{C_D^2 R^2}{64 \sqrt{\pi} r} \left\{ -\frac{1}{P} e^{-Q^2} \left[ \frac{2}{\sqrt{\pi}} Q e^{-Q^2} + (2Q^2 - 1) \operatorname{erf} Q \right] + \frac{1}{P^3} [\sqrt{2} (\operatorname{erf} \sqrt{2} Q - 1) - e^{-Q^2} \operatorname{erf} Q] \right\} + \dots \end{aligned} \quad (2.21)$$

である。ただし、 $P = \sqrt{\frac{Rr}{2}} \cos \frac{\pi\eta}{2}$ ,  $Q = \sqrt{\frac{Rr}{2}} \sin \frac{\pi\eta}{2}$ ,  $\text{erf } Q = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^Q e^{-s^2} ds$

### §3 基礎方程式を差分方程式になおす

方程式 (2.13) ~ (2.17) を解くために、微分方程式と差分方程式で近似する。それには、 $\xi\eta$  面の矩形領域 ( $0 \leq \xi \leq \xi_\infty$ ,  $0 \leq \eta \leq 1$ ) を一辺の長さ  $h$  の正方格子に分け (図2), 未知量  $\psi, \omega$  を格子点上だけに限って考える。1階微分商については

$$\frac{\partial \phi}{\partial \xi} \longrightarrow \phi_\xi \equiv \frac{\phi(\xi+h) - \phi(\xi-h)}{2h},$$

ラプラスアンについては

$$\Delta \phi \longrightarrow \Delta_h \phi \equiv \frac{\phi(\xi-h, \eta) + \phi(\xi, \eta-h) + \phi(\xi+h, \eta) + \phi(\xi, \eta+h) - 4\phi(\xi, \eta)}{h^2}$$

のおきかえをすれば、微分方程式 (2.13), (2.14) は

$$\Delta_h \omega = \frac{R}{2} N_h [\psi, \omega], \quad (3.1)$$

$$\Delta_h \psi = -\pi^2 r^2 \omega \quad (3.2)$$

と3.3. 1. である

$$N_h [\psi, \omega] = \pi r (\cos \theta \omega_\xi^2 - \sin \theta \omega_\eta^2) - (\psi_\xi \omega_\eta - \psi_\eta \omega_\xi) \quad (3.3)$$

境界条件 (2.15) ~ (2.17) は

$$\eta = 0, 1: \quad \psi = 0, \quad \omega = 0, \quad (3.4)$$

$$\xi = 0: \quad \begin{cases} \psi = -\sin \pi \eta, \\ \psi_\xi = -\pi \sin \pi \eta, \end{cases} \quad (3.5)$$

$$\xi = \xi_\infty: \quad \begin{cases} \psi = f(\xi_\infty, \eta; C_{Dh}) \equiv \psi_1 + \psi_2, \\ \omega = g(\xi_\infty, \eta; C_{Dh}) \equiv \omega_1 + \omega_2. \end{cases} \quad (3.6)$$

$$\xi = \xi_\infty: \quad \begin{cases} \psi = f(\xi_\infty, \eta; C_{Dh}) \equiv \psi_1 + \psi_2, \\ \omega = g(\xi_\infty, \eta; C_{Dh}) \equiv \omega_1 + \omega_2. \end{cases} \quad (3.7)$$

$$\xi = \xi_\infty: \quad \begin{cases} \psi = f(\xi_\infty, \eta; C_{Dh}) \equiv \psi_1 + \psi_2, \\ \omega = g(\xi_\infty, \eta; C_{Dh}) \equiv \omega_1 + \omega_2. \end{cases} \quad (3.8)$$

ここで  $f, g$  は (2.20), (2.21) の展開の第2項までとしたもの, すなわち “+...” の部分を省略した式を表わす. また, 抵抗係数を計算する積分は, 線分  $\xi = \xi_D$  ( $xy$  面では半径  $r_D$  の円周) に沿い Simpson 則に従って行なうものとする. 以下次のように書くことにしよう:

$$C_{Dh} = S_h [\psi, \omega; \xi_D]. \quad (3.9)$$

#### §4. 数値解法

非線型連立方程式 (3.1) ~ (3.8) を解くのに, 次のような逐次代入法を用いる. すなわち, すべての格子点上で第  $\nu$  近似  $[\psi^{(\nu)}, \omega^{(\nu)}]$  がすでにえらわれているとして, 第  $(\nu+1)$  近似を次のようにして計算する.

i) (3.9) により  $C_{Dh}$  を計算する:

$$C_{Dh}^{(\nu+1)} = S_h [\psi^{(\nu)}, \omega^{(\nu)}; \xi_D]. \quad (4.1)$$

ii) (3.7), (3.8) により  $\xi = \xi_\infty$  における  $\psi, \omega$  を計算する:

$$\begin{cases} \psi^{(\nu+1)}(\xi_\infty, \eta) = f(\xi_\infty, \eta; C_{Dh}^{(\nu+1)}), \\ \omega^{(\nu+1)}(\xi_\infty, \eta) = g(\xi_\infty, \eta; C_{Dh}^{(\nu+1)}). \end{cases} \quad (4.2)$$

iii)  $\xi = \xi_\infty - h$  から始めて  $\xi = h$  まで,  $\omega$  と  $\psi$  とを (3.1), (3.2) によって交互に計算する. すなわち, まず  $\xi = \xi_\infty - h$  の上で

$$\begin{cases} h^2 \bar{\omega}_{\eta\eta}^{(\nu+\frac{1}{2})} - 2\bar{\omega}^{(\nu+\frac{1}{2})} = -[\omega^{(\nu+\frac{1}{2})}(\xi+h, \eta) + \omega^{(\nu)}(\xi-h, \eta)] + \frac{R}{2} h^2 N_h[\psi, \omega]^{(\nu, \nu+\frac{1}{2})}, \\ \omega^{(\nu+\frac{1}{2})} = \beta \bar{\omega}^{(\nu+\frac{1}{2})} + (1-\beta) \omega^{(\nu)} \end{cases} \quad (4.3)$$

---


$$^* \phi_{\eta\eta} = \frac{1}{h^2} [\phi(\eta+h) - 2\phi(\eta) + \phi(\eta-h)]$$

によって  $\omega^{(\nu+\frac{1}{2})}$  を計算し、これを新しい  $\omega$  とする。次に、  
同じく  $\xi = \xi_\infty - h$  の上で

$$\begin{cases} h^2 \bar{\psi}_{\eta\eta}^{(\nu+\frac{1}{2})} - 2\bar{\psi}^{(\nu+\frac{1}{2})} = -[\psi^{(\nu+\frac{1}{2})}(\xi+h, \eta) + \psi^{(\nu)}(\xi-h, \eta)] - h^2 \pi^2 r^2 \omega^{(\nu+\frac{1}{2})}, \\ \psi^{(\nu+\frac{1}{2})} = \alpha \bar{\psi}^{(\nu+\frac{1}{2})} + (1-\alpha) \psi^{(\nu)} \end{cases} \quad (4.4)$$

によって新しい  $\psi$  を計算する。これが可止と  $\xi = \xi_\infty - 2h$   
へ進み、同様のことを行う。全く同様にして  $\xi = h$  まで  
進む。すなわち、これは加速 line Liebmann 法である。

iv)  $\xi = 0$  の上で、(3.2) を用いて  $\omega$  を計算する。境界条件  
(3.5) から  $\frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} = \pi^2 \sin \pi \eta$ 、したがって

$$\omega^{(\nu+1)}(0, \eta) = -\frac{1}{\pi^2} (\psi_{\xi\xi}^{(\nu+\frac{1}{2})} + \pi^2 \sin \pi \eta). \quad (4.5)$$

$\psi_{\xi\xi}$  は物体内部へ延長した格子点上の値を食んでゐるが、  
これは境界条件 (3.6) によって、物体外部の点上の値を  
用いて表わすことができる。

v) iii) と同様の操作を  $\xi = h$  から始めて  $\xi_\infty - h$  まで行ない、  
新しい値として  $\omega^{(\nu+1)}$ ,  $\psi^{(\nu+1)}$  をうる。

## §5. 計算結果

具体的計算は、 $R = 1, 2, 4, 6, 7, 10, 15, 20, 30, 40,$   
 $50, 60$  の各場合について、 $h = \frac{1}{40}$ ,  $\xi_\infty = 36h \sim 52h$   
( $r_\infty = 17 \sim 60$ ) — 格子点の総数は  $1513 \sim 2169$  — として  
行なった。  $r_\infty$  を有限の大きさに選んだための誤差をへらすために、



1 ~ 20 の各  $R$  に対しては, 3通りの  $r_0$  について解を求め, 適当に外挿を行なうことによって  $r_0 \rightarrow \infty$  とした場合の値を推定した.

逐次代入法の出発値  $\psi^{(0)}$ ,  $\omega^{(0)}$  としては, 僅かだけ異なる  $R$  の値に対してすでにえられた解を用いることとして, なるべく真の解に近いと思われるものを選んだ. また, 逐次代入の操作の収束については,  $C_{Dh}^{(u)}$  の値が小数以下 5 桁まで確定するのをその判定条件とした. こうしてきまる近似解は, 当然 (3.1) をよい精度でみたしていなければならないが, 実際ほとんどすべての格子系について

$$\frac{1}{R} \left| \Delta_h \omega - \frac{R}{2} N_h [\psi, \omega] \right| < 10^{-5}$$

であることが確かめられた ( $R=50, 60$  については右辺は  $10^{-4}$  程度であった).

(4.4), (4.3) における加速係数  $\alpha, \beta$  は, 場合に応じて異なる値を用いた. ほとんどすべての例で  $\alpha$  は 1 にとった. 逐次代入の操作が収束するか否かは極めて鋭敏に  $\beta$  の値に依存し,  $R=1$  では  $\beta=0.55$  でよいが,  $R=60$  では  $\beta < 0.01$  というような小さい値をとらないと発散の恐れがあった (加速係数ではなくて減速係数!). したがって,  $R$  が大きい場合には収束の速度が極めておそく, 例えば  $R=50$  近辺の解から出発して  $R=60$  の解をうるまでに約 1 万回, 約 2 時間の繰返し計算が必要であった.

代表的な等圧線 (流線), 等  $\omega$  線によって流れの様子を図 3 に示す.

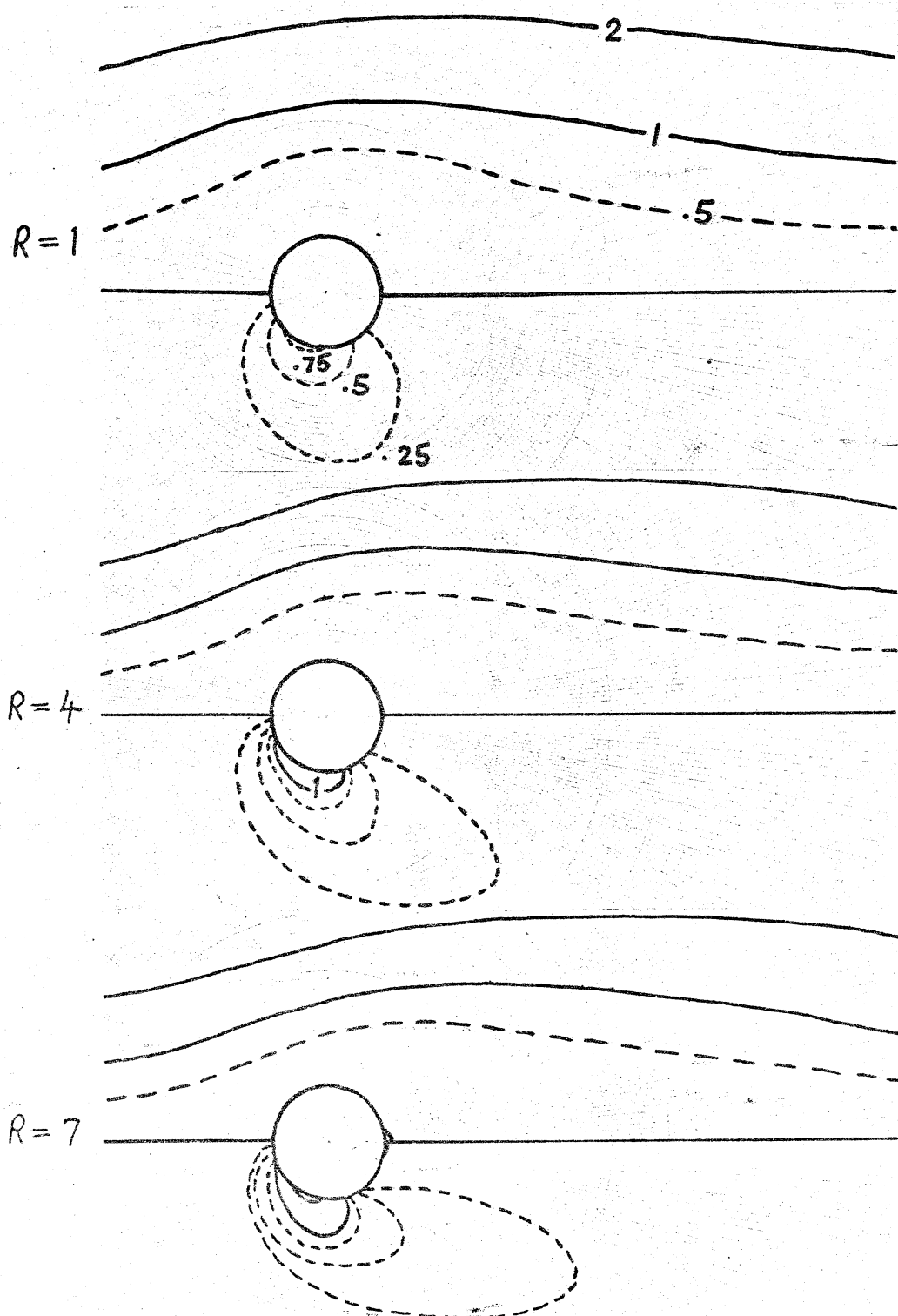
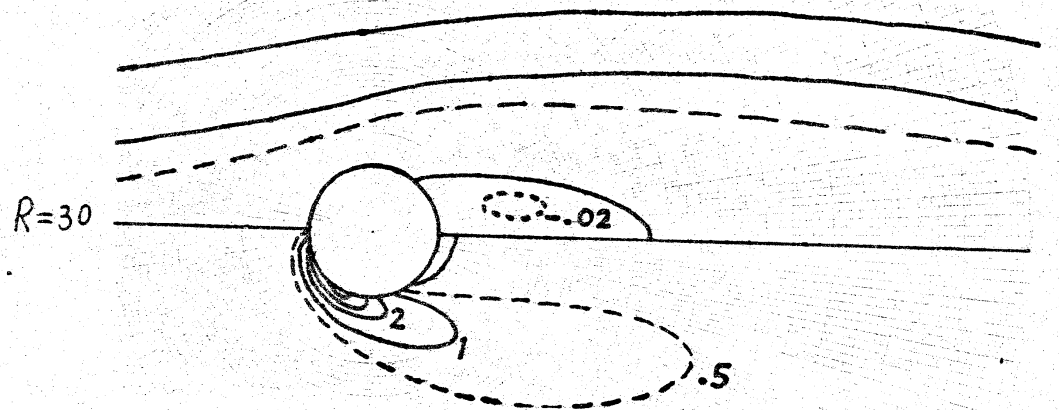
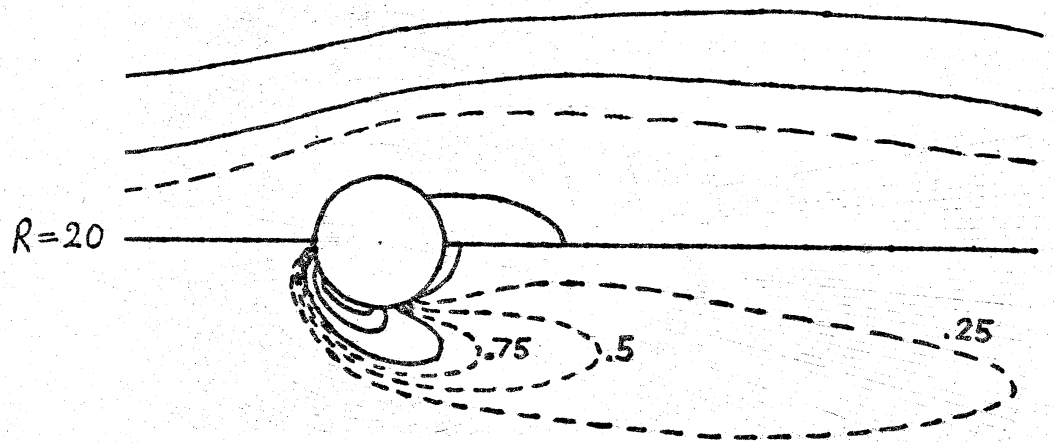
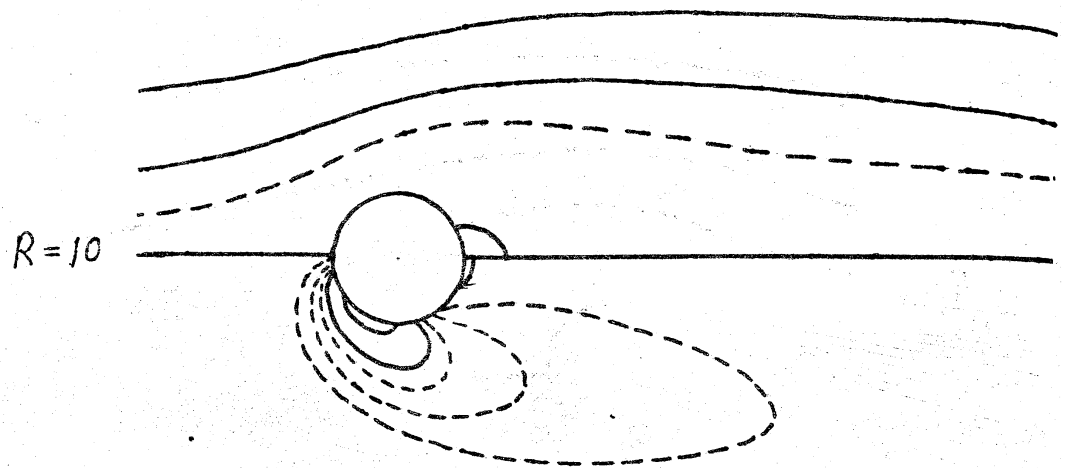


図 3-1 流線と等 $\omega$ 線



3-2

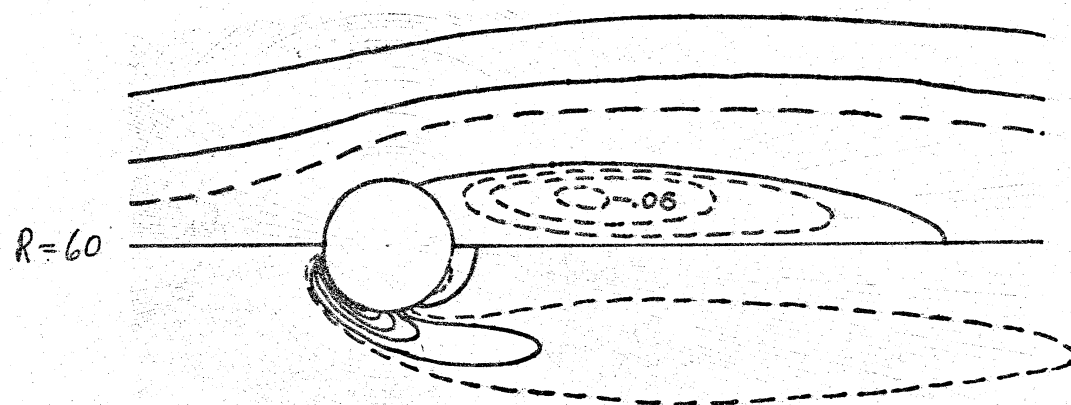
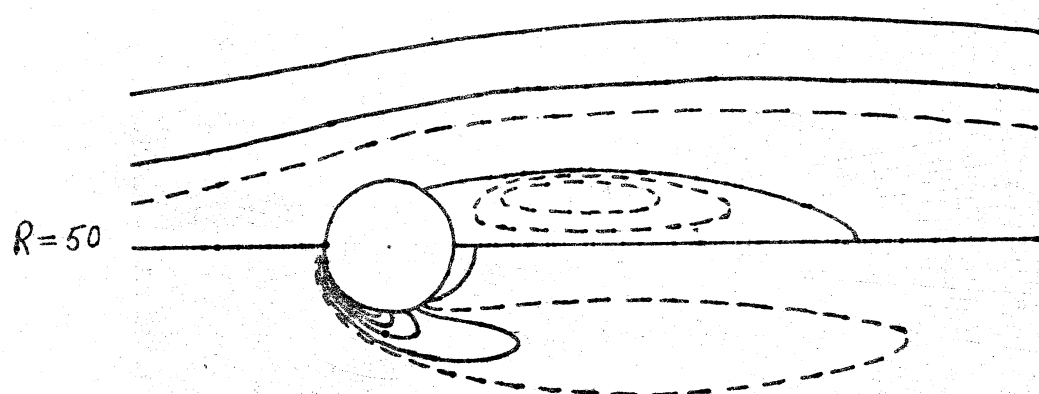
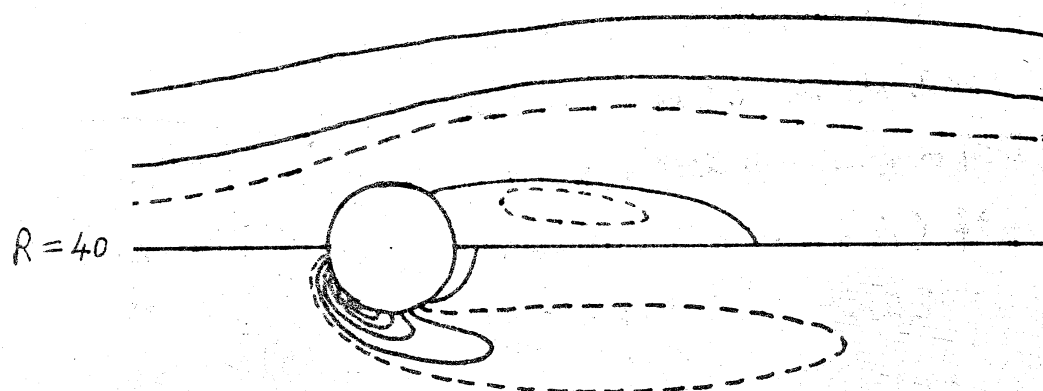


图 3-3

§6.  $R \rightarrow \infty$  の極限についての考察

2次元 Navier-Stokes 方程式の定常解が  $R \rightarrow \infty$  の極限で Kirchhoff 流の解 (図4) になるであろうということは、現在では多くの流体力学者の予想するところである (Imai [6]).

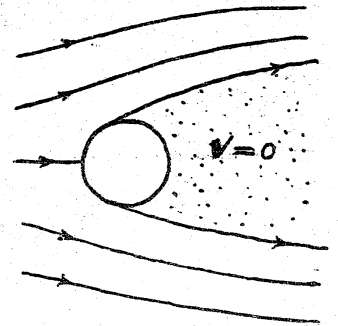


図4.

高々  $R=60$  までの計算結果からは  $R \rightarrow \infty$

の極限について断定的なことは何も言えないが、ある程度の裏づけだけは与えているように思われるので、以下にそれを述べる。

1) 閉じた渦の長さ。図5に示すように、物体背後にできる渦の長さは  $R-R_0$  に比例して大きくなる ( $R_0$  は渦の長さが0となる最大の  $R$  の値 ( $\geq 6$ )). これから直ちに、 $R \rightarrow \infty$  の極限を Kirchhoff 流であるとすることはできないが、少なくとも  $R \rightarrow \infty$  で渦の長さが有限に落着くとは思われない。Allen & Southwell [1] の数値計算の方法が正しくないことは Kawaguti [8] によって批判された。Dennis & Shimshoni [4] も、 $R$  がある値をこえると渦の長さが小さくなるという結果をえている。彼等の計算では、無限遠の条件については正しい考慮が払われており、なぜこのような結果が出るのかははっきりはわからないが、 $\psi$  と  $\omega$  を級数展開した際の項数のとり方の不足が原因ではないかと思われる。渦の長さが  $R$  と共に増大する一方であることは、非定常流の極限として定常解を求めた最近の Kawaguti & Jain [9] の計算から見られる。

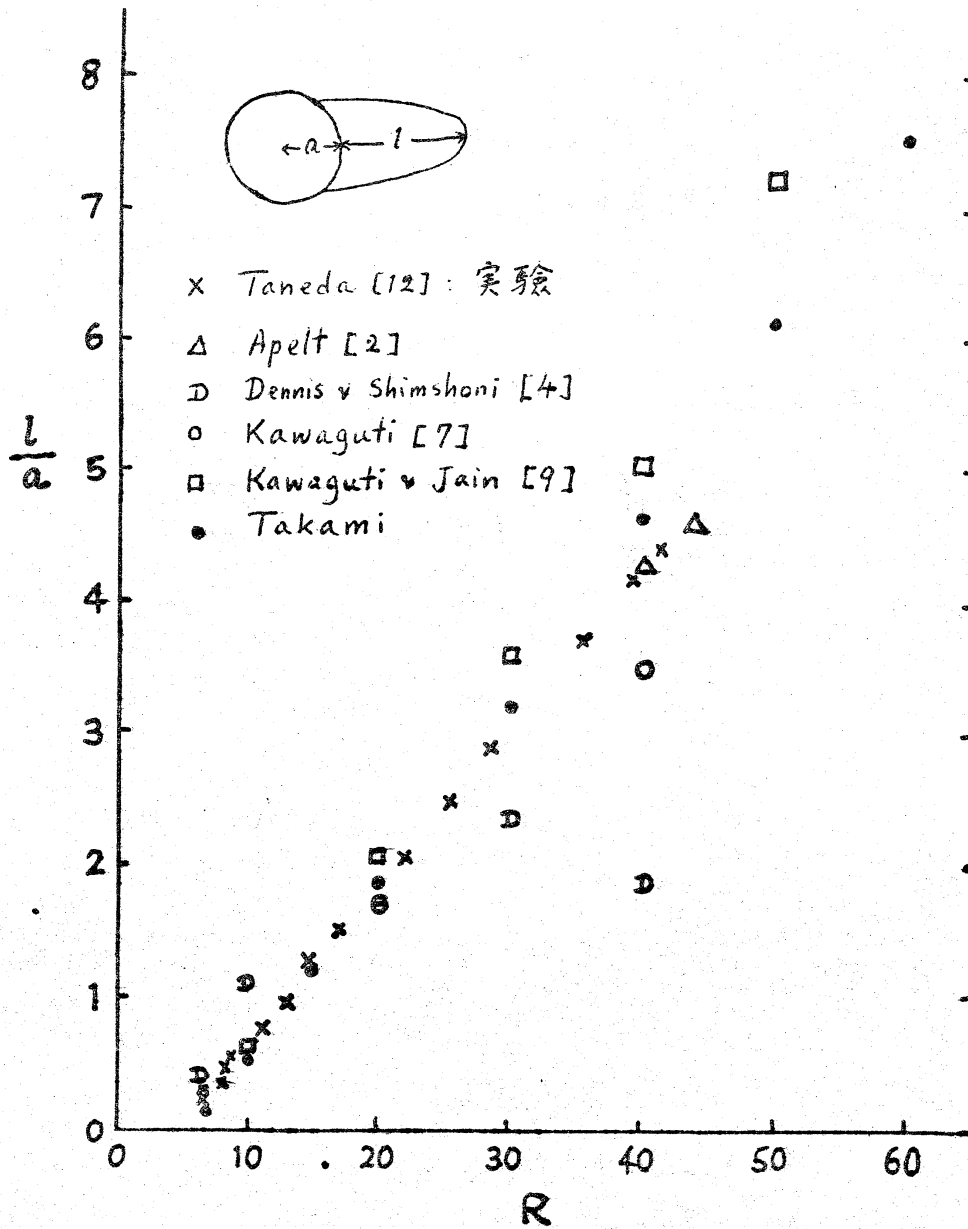


図 5. 閉じた渦の長さ

ii) 開いた渦の幅. 物体表面に沿う流線が物体からはがれる点の位置は (後よどみ点から測った角を  $\varphi$  としよう),  $R$  が大きくなるにつれて前方に移動する. 極限の流れがもし Kirchhoff 流であるならば,  $R \rightarrow \infty$  で  $\varphi \rightarrow \varphi_\infty = 125^\circ$  となる筈である (Brodetsky [3]).  $R=60$  では  $\varphi$  はまだ  $59^\circ$  にはならないので  $\varphi_\infty$  の値を推定するのはむずかしいが,  $\log(125^\circ - \varphi)$  と  $\log R$  に対してプロットすると (図6) グラフがほぼ直線になるので,  $\varphi \rightarrow 125^\circ$  と考えるのが一応もっともらしく見える.

### iii) 抵抗係数.

Imai [6] は, Kirchhoff 流を第0近似として,  $R$  が大きい場合の抵抗法則を理論的に導いた.

それによれば,  $R$  が大きいとき抵抗係数は

$$C_D(R)^{\frac{1}{2}} = C_D(\infty)^{\frac{1}{2}} + k R^{-\frac{1}{2}} \quad (6.1)$$

の形をとる. ここで  $C_D(\infty)$  は Kirchhoff 流における抵抗値,  $k$  は物体の形によってきまる定数である.

図7 からわかるように, 数値計算の結果は極めてよくこの法則に従っている. 物体が円柱の場合には, Kirchhoff 流に対する抵抗値  $C_D(\infty)^{\frac{1}{2}}$  はおよそ 0.707 である (Brodetsky [3]).

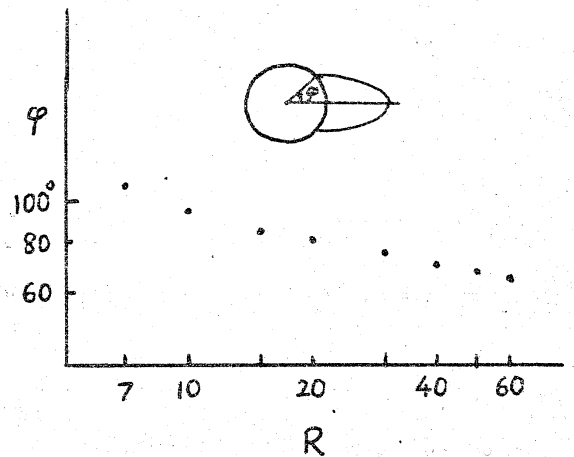


図6 はがれの角

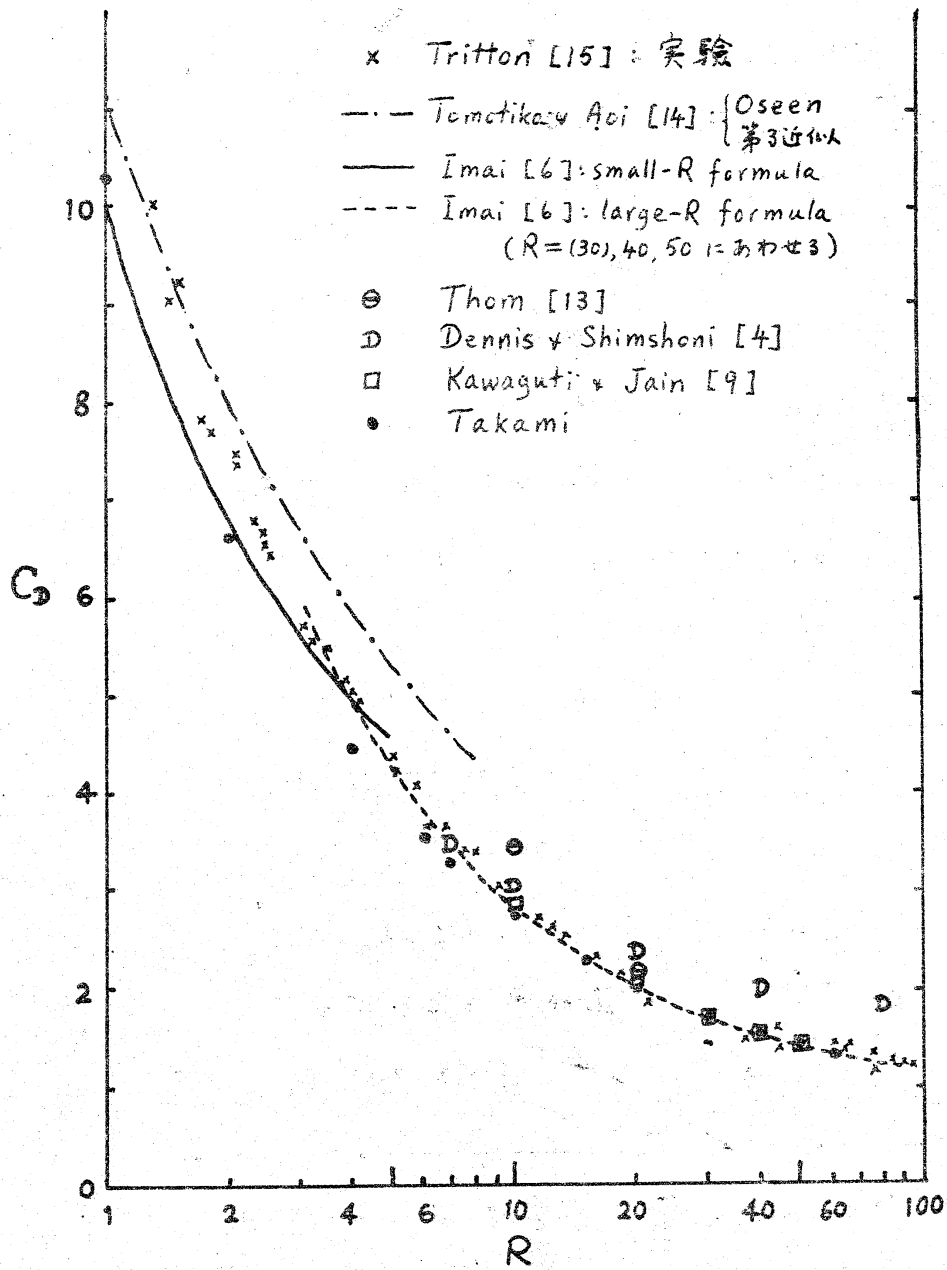


図 7. 抵抗係数



Reynolds 数の二つの値  $R_1$ ,  $R_2$  について計算された  $C_D(R_1)$ ,  $C_D(R_2)$  から, 式 (6.1) を用いて  $C_D(\infty)^{\frac{1}{2}}$  を計算することができる. この値はもちろん一定とはならず,  $R_1, R_2$  によって変化する.

( $R_1, R_2$ ) として (10, 15), (15, 20),

..., (50, 60) のように相隣る値

の組をとって (6.1) から計算した  $C_D(\infty)^{\frac{1}{2}}$  の値を 図 8 に示す.  $R_1$  と  $R_2$  を大きくするにつれて, この値は 0.707 に近づいていくようである.

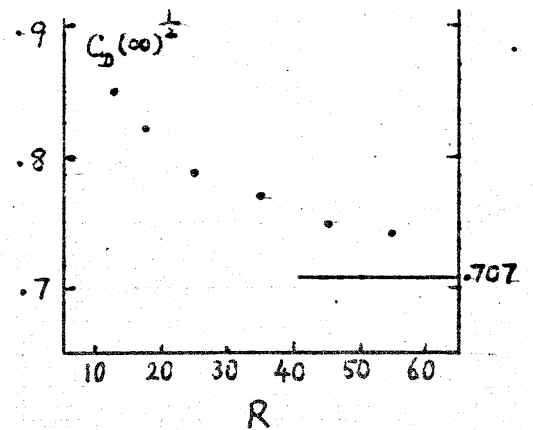


図 8

iv) 圧力係数. Roshko [11] によれば,  $R$  が大きいとき, 物体の後よどみ点での圧力係数 ( $\equiv \frac{p-p_\infty}{\frac{1}{2}\rho U^2}$ ) は

$$C_p = A R^{-\frac{1}{2}} \quad (6.2)$$

の形をとるといふ ( $A$  は  $R$  によらない定数). しかし, 図 9 からわかるように, われわれの計算結果はこうはならない. どちらが正しいの原因がどこにあるかは現在のところ不明である.\*

\* われわれの数値計算の結果は, まして  $R$  が小さいときに式 (6.2) とよく合うが,  $R$  が大きくなるとずれてくる. Keller & Takami [10] の論文で, Roshko の式とよく合うと思っているのは, あとになって誤りであることがわかった.

## §7. 数値解の精度

Navier-Stokes

方程式の厳密解

がえられていない

以上, ここでえた

数値解が微分

方程式の解をど

のくらいよく近似し

ているかの判定は

むずかしい。そこ

で, 例えは次の

ようにして およそ

の見当をつけよう

することにする。

i) 物体の前

よどみ点における

圧力係数は,  $R$

が大きいたときには

$$C_p = 1 + \frac{B}{R}$$

( $B$ は  $R$  によらな  
い定数) となる

ことが, よどみ点

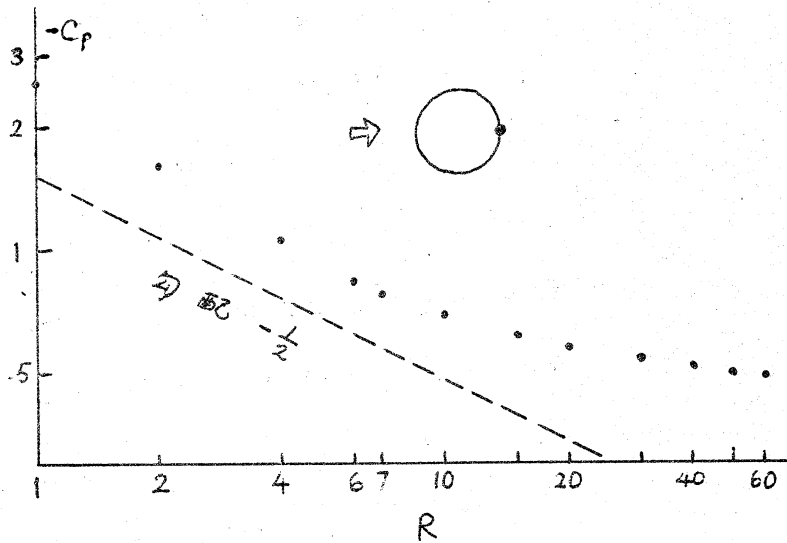


図9. 後よどみ点における圧力係数

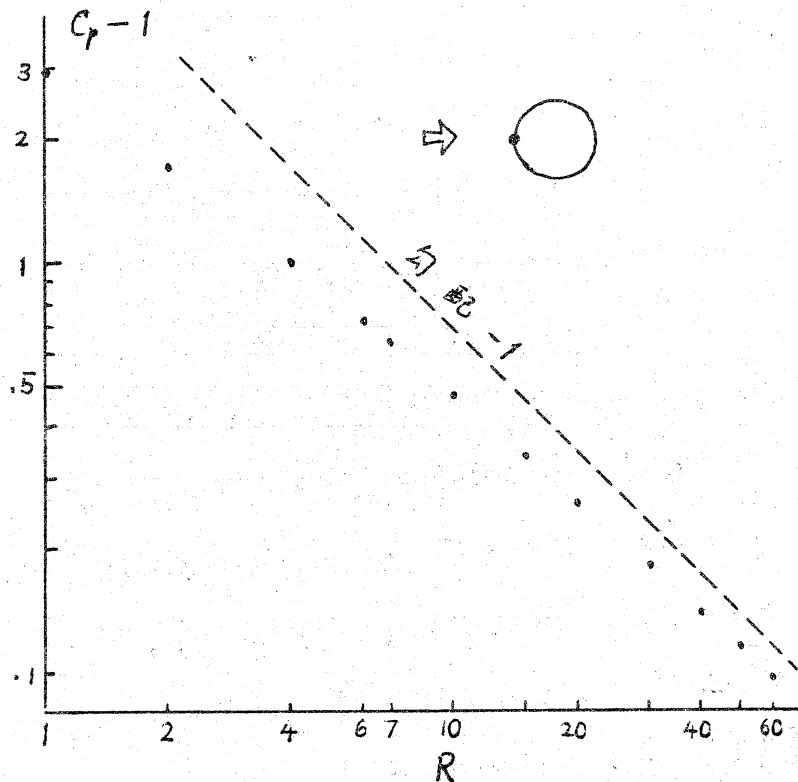


図10 前よどみ点における圧力係数

流れの Navier-Stokes 方程式の解から導かれる。われわれの計算結果はたしかにこの法則に従っている (図 10)。

ii) Navier-Stokes 方程式の解については、式 (2.18) の右辺は積分路  $\Gamma$  によらず一定の値を与える筈である。したがって、数値解について、積分路をかえて計算した結果を調べてみるのも一つの方法であろう。積分路として半径  $r_d$  の円周をとることとし、計算された  $C_{dh}(r_d)$  を図 11 に示す。  $R$  が小さいうちは  $C_{dh}(r_d)$  の値は  $r_d$  によらずほとんど完全に一定であるが、  $R$  が大きくなると次第に一定ではなくなり、物体表面上および物体から遠方の円周上で計算した値はかなりの不一致を示す。  $R$  が大きくなるにつれて、物体表面近くと後流のへりとは境界層ができてくるので、差分方程式がそこの流れの有様を十分によく近似しえなくなっているためであろう。特に物体遠方では物理面における格子間隔が大きくなるので、この傾向は著しい。  $R$  が大きくなるにつれて、物体から遠方での  $\psi$  と  $\omega$  の値は格子長毎に大きく振動するようになる。

iii) “無限遠”の境界条件として、この計算では展開式 (2.20), (2.21) の第 2 項までを用いた。これを第 1 項までしかとらざる場合、および境界値と単に 0 とおいてしまう場合との比較を行なったのが図 12 である。抵抗係数の値は、“無限遠”における  $\psi$  の境界値の与え方でかなり変化するようにある。  $R=1 \sim 20$  の各場合に、3通りの  $r_\infty$  について問題を解き、外挿を行ったのは、この誤差を小さくするためであった。  $\omega$  の境界条件は、無限遠近傍の

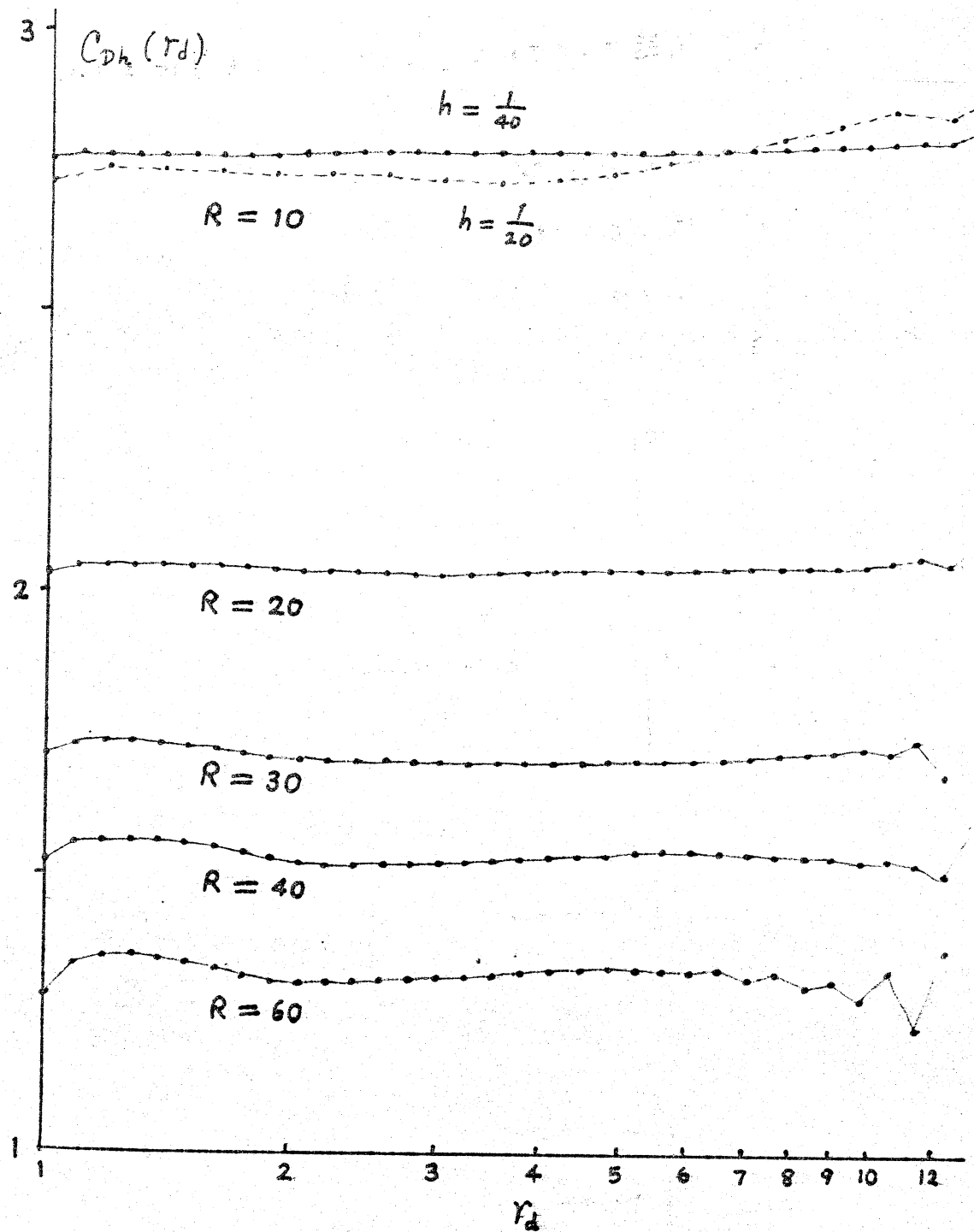


図 11

種々の積分路について計算した抵抗係数

不規則性を問題にしなければ, 0 としてしまっても変化はない。

### §8. 定常解の安定性と一意性

領域が無限に広い場合に, 2次元 Navier-Stokes 方程式の定常解については, まだ存在も一意性も証明されていない ( $R$  が大きい場合)。しかし, さし当り Navier-Stokes 方程式の解はとにかく存在

するものとし,  
ここでえたのは  
その近似解  
になっていると  
仮定しよう。

わきわきの  
計算で, 各  $R$   
についてはき  
りした一つの結  
果がえられたと  
ころを見ると,  
これらの一連の  
解は, 定常の  
つ  $x$  軸に限り  
て対称な境

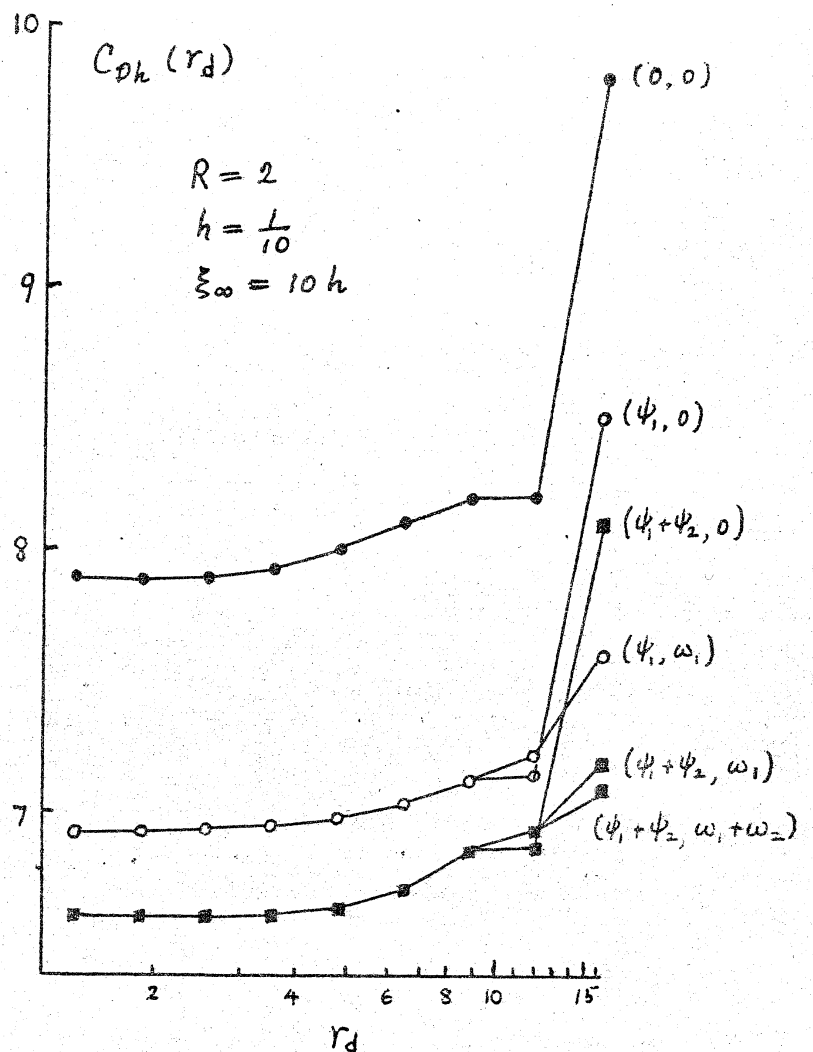


図12. 境界条件を変えたときのちがい

乱に対しては安定である\*。

Vilte [16] は、同心円筒内の Couette 流について、Navier-Stokes 方程式の定常解が一意的でなく、ある  $R$  で実際に解の枝分れがおこることを示した。Couette 流とわれわれが今考えている流れとは、いくつかの点で性質のちがいはあるが、われわれの問題についても、 $R$  のある臨界値  $R_c$  で解が枝分れする可能性がないとは言えない。しかし、われわれの計算結果から判断すると、かりにそのような  $R_c$  が存在するならば、その値は 60 よりも大きい、あるいは 60 より小さければそこで分れた解の枝は、ここで行った計算方法では求められなかったという意味で不安定なものである。しかしまた、有限な  $R_c$  は実は存在せず、定常解は  $R \rightarrow \infty$  まで一意に存在するのかもしれない。この場合には、現実に見られる層流から von Kármán 渦列を経て乱流に移行する現象は、単に定常解が  $x$  軸に関して非対称な攪乱に対して安定でなかったためにおこるのであろう (Fromm & Harlow [17])。いずれにしても、この興味ある問題の解明には、数学者と流体力学者の協力の必要性が痛感される。

---

\* Kawaguti & Jain [9] の結果を見ると、 $x$  軸に関して対称な流れだけに話を限れば、たとえ非定常な流れまで考えたとしても、ここでえた解は安定であるように思われる。

ここで述べた計算の殆ど大部分は、筆者が New York 大学の Courant 研究所で IBM 7094 および CDC 6600 を使用して行ったものである。その際、同研究所の H. B. Keller および P. D. Lax 両教授には、計算機使用について便宜をほかって頂いたほか、数値計算の方法について教えられるところが多かった。また、当時 Cornell 大学へ来ておられた 今井功教授には、この問題のあらゆる点に関して貴重な助言を頂いた。更に、当時 Wisconsin 大学に来ておられた 川口光年教授、および九州大学応力研の 種子田定俊教授からは、比較検討のため、未発表の詳細な数値計算結果と実験データを見せて頂き、こまかい助言として頂いた。これらの方々に厚くお礼を申し上げます次第である。

## 参 照 文 献

- 1) Allen, D. N. de G. & R. V. Southwell: Quart. J. Mech. Appl. Math. 8 (1955) 129.
- 2) Apelt, C. J.: British Aero. Res. Council, R. & M. No. 3175 (1958).
- 3) Brodetsky, S.: Proc. Roy. Soc. London, A 102 (1923) 542.
- 4) Dennis, S. C. R. & M. Shimshoni: British Aero. Res. Council, C. P. No. 797 (1954).
- 5) Imai, I.: Proc. Roy. Soc. London, A 208 (1951) 487.
- 6) Imai, I.: Univ. of Maryland Tech. Note BN-104 (1957).

- 7) Kawaguti, M.: J. Phys. Soc. Japan 8 (1953) 747.
- 8) Kawaguti, M.: Quart. J. Mech. Appl. Math. 12 (1959) 261.
- 9) Kawaguti, M. & P. Jain: Univ. of Wisconsin MRC Tech. Summary Rept. No. 590 (1965); J. Phys. Soc. Japan 21 (1966) 2055.
- 10) Keller, H. B. & H. Takami: Numerical Solutions of Nonlinear Differential Equations (Wiley, 1966), 115.
- 11) Roshko, A.: C. I. T., Fluid Mechanics Seminar, 1966.
- 12) Taneda, S.: J. Phys. Soc. Japan 11 (1956) 302.
- 13) Thom, A.: Proc. Roy. Soc. London, A 141 (1933) 651.
- 14) Tomotika, S. & T. Aoi: Quart. J. Mech. Appl. Math. 3 (1950) 140.
- 15) Tritton, D. J.: J. Fluid Mech. 6 (1959) 547.
- 16) Velte, W.: Arch. Rational Mech. Anal. 22 (1966) 1.
- 17) Fromm, J. E. & F. H. Harlow: Phys. of Fluids 6 (1963) 975.

## 付記

この論文は、シンポジウムで筆者が行なった講演をもとにして書いた。シンポジウムでは、このあと高石頼三郎氏(愛媛大)が  $R=40$  の場合の計算について報告され、Kawaguti [7] の結果と比較された(高石氏欠席のため川口光平氏(鉄研)が代読)。また、金子幸臣氏(東大生研)は、物体近くおよび後流の境界層を拡大して、もっと精度の高い解と能率的にうる計算方法を提唱された。